2017 FÍSICA DE PARTÍCULAS – 4

22.
a) Muestre que I, R_+, R_-, R_a, R_b y R_c son todas las transformaciones de simetría de un triángulo equilátero de alturas a,b,c. Escriba la tabla de multiplicación.

b) Construya una representación 3x3 del triángulo y una representación (no trivial) de dimensión 1. Esta última, ¿es una representación fiel? (si no es así hay un homomorfismo pero no un isomorfismo entre ambos conjuntos).

c) Muestre que las matrices unitarias forman un grupo. Ídem pero de determinante uno.

d) Considere una matriz u de SU(2) y la matriz $h=\vec{r}.\vec{\sigma}$ con $\vec{r}=(x,y,z),\vec{\sigma}=(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z)$ los vectores posición y de matrices de Pauli.
La transformación $h'=uhu^{-1}=\vec{r'}.\vec{\sigma}$ define una transformación de las coordenadas (x,y,z). Sea $R(u)$ la matriz que relaciona $\vec{r}$ y $\vec{r'}$. Muestre que $R(u)$ define una rotación de las coordenadas y es por tanto real y ortogonal.

e) Si u es diagonal, indique qué rotación representa. Ídem para u real. Usando estos resultados construya la matriz u correspondiente a los ángulos de Euler: $u(\alpha,\beta,\gamma)=u_1(\gamma)u_2(\beta)u_1(\alpha)$. Muestre que la matriz $-u$ representa la misma rotación.

“Existe entonces un homomorfismo bi-valuado entre el grupo de matrices de SU(2) y el grupo de las rotaciones en 3 dimensiones SO(3).”

23. La tabla muestra las primeras funciones de onda espaciales normalizadas del electrón de un átomo hidrogenoide con Z protones en el núcleo.
a) Verifique, para el estado base, que la normalización de la función de onda es correcta.

Quantum Numbers n	l	m_l	Eigenfunctions
1	0	0	$\psi_{100}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}e^{-Zr/a_0}$
2	0	0	$\psi_{200}=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}\left(2-\frac{Zr}{a_0}\right)e^{-Zr/2a_0}$
2	1	0	$\psi_{210}=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}\frac{Zr}{a_0}e^{-Zr/2a_0}\cos\theta$
2	1	±1	$\psi_{21\pm1}=\frac{1}{8\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}\frac{Zr}{a_0}e^{-Zr/2a_0}\sin\theta\, e^{\pm i\varphi}$

b) Calcule la probabilidad de encontrar al electrón en el hemisferio superior del átomo de hidrógeno ($\theta<\pi/2$) y a una distancia menor o igual a la mitad del radio de Bohr para los estados con l=1.

24.

a) Muestre que el decaimiento beta, tal como se lo pensó originalmente, $n \rightarrow p + e^-$, viola la conservación de momento angular. Indique el espín que debería asignarse al neutrino en el decaimiento beta:

$$n \rightarrow p + e^- + \nu_e$$

b) En el decaimiento $\Delta^{++} \rightarrow p + \pi^+$ indique los valores posibles del momento orbital en el estado final.

c) Un electrón en el átomo de hidrógeno tiene momento angular orbital uno. Si el momento angular total es J=3/2, y $m_J = 1/2$ indique la probabilidad de medir al electrón con $m_s = 1/2$.

d) Considere dos partículas de espín 2, cada una en un estado con m_s=0. Indique los valores posibles y las probabilidades de medir diferentes valores del momento angular total del sistema si el momento angular orbital es cero.

25.

a) Calcule los autovectores normalizados y autovalores del operador S_y.

b) Si un electrón está en el estado $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$, indique qué valores se pueden obtener midiendo S_y y con qué probabilidades.

c) Un electrón se encuentra en el estado de espín $\begin{pmatrix}1/\sqrt{5}\\ 2/\sqrt{5}\end{pmatrix}$. Indique para los tres operadores $S_{x,y,z}$ los valores posibles que se obtienen en una medida y las probabilidades respectivas.

26.

a) Demuestre que $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\, \varepsilon_{ijk}\, \sigma_k$.

b) Calcule $[\sigma_i, \sigma_j] = \sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i$ y $\{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i$.

d) Muestre que para dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se cumple $(\vec{\sigma}.\vec{a})(\vec{\sigma}.\vec{b}) = \vec{a}\times\vec{b} + i\vec{\sigma}.\vec{a}\times\vec{b}$

e) Demuestre que $\exp(i\sigma_z/2) = i\,\sigma_z$.

f) Calcule la matriz U que representa una rotación de 180^0 alrededor del eje “y” y muestre que transforma ↑ en ↓ .

g) Muestre que $U(\theta) = \cos(\theta/2) - i\vec{\theta}.\vec{\sigma}\sin(\theta/2)$ donde el vector θ es de módulo θ y en la dirección del eje de rotación.